

1- Temel Kavramlar ve Dağılımlar

İstatistik: Gözlemlenen verilerin incelenmesinde matematiğin uygulanması ile ilgilenen bir disiplindir.

Anakütle (Euren, kitle, popülasyon): Hakkında araştırma yapmak istenen biremler topluluğu.

Örnekleme: Anakütleden belirli yöntemlerle seçilen ve seçildiği anakütleyi temsil eden eurenin alt topluluğudur.

Değişken: İstatistik biremlerinin sahip olduğu ve farklı değerler alabilen özelliklerdir.

→ Sayısal: a) Sürekli (ölçülebilir) ^{Ö: ağırlığın büyüklüğü, boy...}
b) Kesikli (sayılabılır) ^{Ö: nüfus...}

→ Sözel ^{Ö:} Cinsiyet, medeni durum, göz rengi...

İstatistik

Belirli İstatistik

Kitleden belirli değişken yada değişkenler için elde edilen verileri kullanarak elimizdeki verileri özetlemeyi amaçlar. Bu özetleme frekans dağılımı, grafikler ve parametreleri (ortalama, standart sapma, varyans...) hesaplayarak yapılır.

Temel ve Genel İstatistik

Kitleden rastgele seçilen örneklerdeki veriler kullanılarak kitle parametreleri hakkında tahmin yada parametrelerle ilgili hipotezlerin doğru olup olmadığının araştırılması amaçları.

örnek

değişken (sayısal)

Örnek: 4DÜ'deki öğrencilerin aylık harcamalarına ilişkin bir araştırma yapmak istiyorsunuz.

Anakütle: 4DÜ'deki öğrenciler ($N=20.000$)

Örnekleme: 4DÜ'deki tüm öğrencilerden rastgele seçilen 1000, 200, 503... öğrencilik grup

1- Frekans (Sıklık) Dağılımı

Frekans, her bir verinin kaç kere tekrar edildiğini gösterir.
2'ye ayrılır.

1- Gruplandırılmamış Frekans Dağılımı

2- Gruplandırılmış Frekans Dağılımı

- Gruplandırılmamış Frekans Dağılımı

Örnek: İstatistik dersinin bir sınıfta 10 öğrenci olduğuna varsayalım ve bu öğrencilerin son dönem sınav sonuçları, (değişken)

$N=10$ 70 78 80 80 95 95 80 70 75 75
70 70 75 75 78 80 80 80 95 95

Seçilmiş verilmiş olsun. Bu verilerin frekans dağılımını oluşturunuz.

X: Bir öğrencinin aldığı orta dönem sınavı notu

(eğerin değişkeni, kitle)

f: frekans

Rf: Oransal frekans

-den az: birimimli frekans (eklenmeli frekans)

X	f	-den az	Oransal frekans	Oransal eklenmeli frekans	frekans yığılması	eklenmeli frekans yığılması
70	2	2	2/10	2/10	%20	%20
75	2	4	2/10	4/10	%20	%40
78	1	5	1/10	5/10	%10	%50
80	3	8	3/10	8/10	%30	%80
95	2	10	2/10	10/10	%20	%100
	10		10/10			

Erwartungswert

$$E(X) = \sum X \cdot P(X)$$

$$= 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + \dots + 6 \cdot P(6)$$

$$= \frac{1}{6} [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2}$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Varianz

$$X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$X^2 = 1, 4, 9, 16, 25, 36$$

$$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{91}{6}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left[\frac{7}{2} \right]^2$$

$$= \frac{35}{12}$$

Varyans

$$X = 0, 1, 2$$

$$X^2 = 0^2, 1^2, 2^2$$

$$E(X^2) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 4 \cdot P(2)$$

$$= 1 \cdot \frac{81}{190} + 4 \cdot \frac{3}{190}$$

$$= \frac{81}{190} + \frac{12}{190} = \frac{63}{190}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 //$$

$$= \frac{63}{190} - \left(\frac{57}{190}\right)^2$$

$$= \frac{63}{190} - \frac{3249}{36100}$$

$$= 0.33 - 0.09$$

$$= 0.24 //$$

Örnek Bir zar atarak 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayıları eşit olasılıkla dağılımı verilen X rasgele değişkeninin varyansını hesaplayınız.

X : Zarın üst yüzüne gelen sayılar

X : 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P(X=0), P(X=1) \dots \dots P(X=6) = \frac{1}{6}$$

X	$P(X)$
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
...	...
6	$\frac{1}{6}$

Q2: 3'ü bozuk 20 laptop içinden rasgele 2 bilgisayar seçilecektir. Bozuk olma durumuna göre olasılık dağılımını, beklenen değer ve varyans bulunuz.

X : Bozuk olma sayısı

X : 0, 1, 2

(Hiçbirinin bozuk olmaması)

$$P(X=0) = \frac{\binom{17}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{17!}{2!(17-2)!} = \frac{16 \cdot 17}{2} = \frac{136}{190}$$

(Birinin bozuk olma olasılığı)

$$P(X=1) = \frac{\binom{17}{1} \binom{3}{1}}{\binom{20}{2}} = \frac{51}{190}$$

(İkisinin bozuk olma olasılığı)

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{3}{190}$$

$$\frac{3}{190} + \frac{51}{190} + \frac{136}{190} = \frac{190}{190} = 1$$

X	$P(X)$
0	136/190
1	51/190
2	3/190
Σ	1

Beklenen Değer

$$E(X) = \sum_{x=0}^2 X \cdot P(X)$$

$$= 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2)$$

$$= 1 \cdot \frac{51}{190} + 2 \cdot \frac{3}{190} = \frac{51}{190} + \frac{6}{190} = \frac{57}{190}$$

b-) X'in Beklenen Değeri $E(X)$

$$\mu = E(X) = \sum_{x: P(x)} x \cdot P(x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^3 x \cdot P(x)$$

$$= 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 2 \cdot P(2) + 3 \cdot P(3)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} //$$

c-) X'in Varyansı

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$X = 0, 1, 2, 3$$

$$X^2 = \overset{0^2}{0}, \overset{1^2}{1}, \overset{2^2}{4}, \overset{3^2}{9}$$

$$E(X^2) = 0 \cdot P(0) + 1 \cdot P(1) + 4 \cdot P(2) + 9 \cdot P(3)$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{12}{8} + \frac{9}{8}$$

$$= \frac{24}{8} = 3 //$$

$$\text{Var}(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \underset{(a)}{3} - \underset{(b)}{\frac{9}{4}} = \frac{3}{4} //$$

- Rasgele Değişkenler, Dağılımları,
Beklenen Değer ve Varians -

Rasgele değişken, değer bir deney sonucuyla be-
lenen değeri ve X ile gösterilir.

Kesikli ve Sürekli rasgele değişken olrak örne-
2 ile ayrılır.

Yalınlar

3 sayıları

Sayılmayan (ölçülebilir)

ör. 85. sayı

- Kesikli Rasgele Değişkenler ve Dağılımı -

2) 3 kez ard arda atılan bir para alınca de-
nede yazıların sayıları ile ilgilenelim.
 $2 \times 2 \times 2 = 8$

X : Yazıların sayısı, $X = 0, 1, 2, 3$

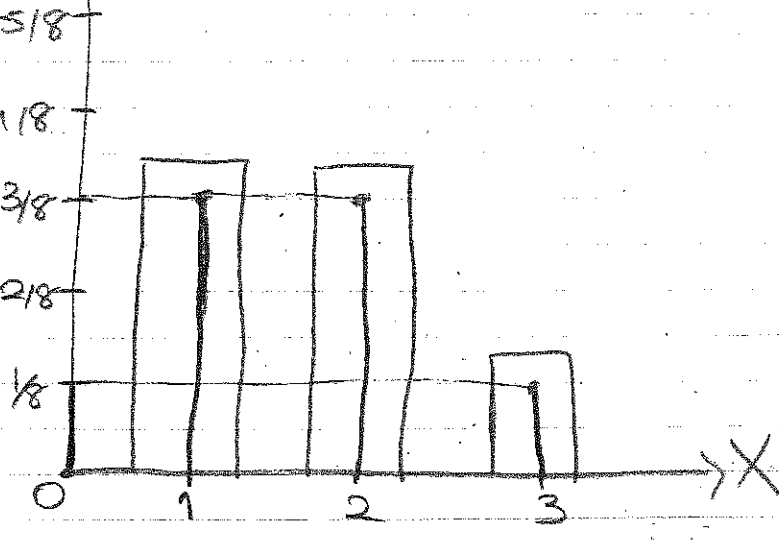
$\{ \underline{YYY}, \underline{YYT}, \underline{YTY}, \underline{TYY}, \underline{YTT}, \underline{TTY}, \underline{TTY}, \underline{TTT} \}$

X 'in olasılık dağılımı

X	$P(X)$ (olasılık)
0	$1/8$
1	$3/8$
2	$3/8$
3	$1/8$

yazı gelme
olasılığı

$P(X)$

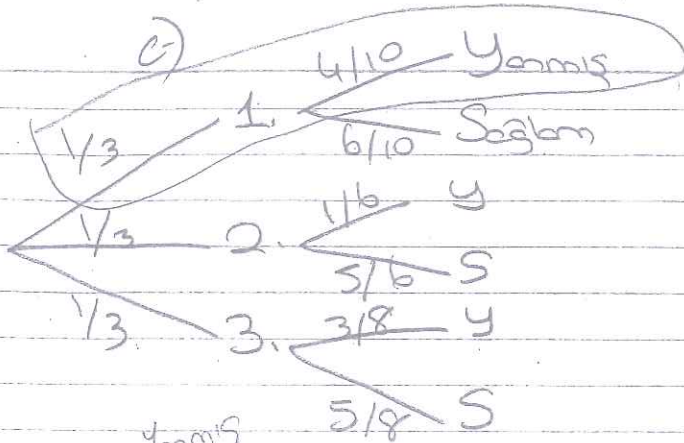


$P(X=0) = 1/8$

$P(X=1) = 3/8$

$P(X=2) = 3/8$

$P(X=3) = 1/8$



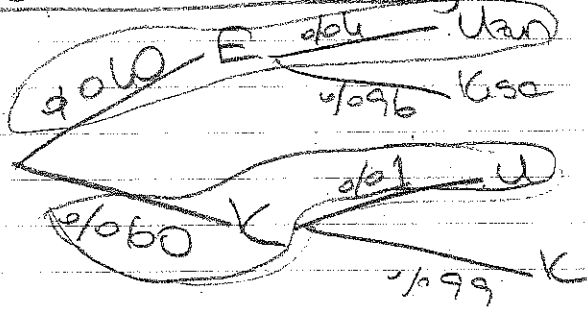
a-) $P(Y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$

b-) $P(S) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} =$
 $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} = \frac{18}{90} + \frac{25}{90} + \frac{3}{24}$
 $= \frac{43}{24} + \frac{5}{24} = \frac{1032 + 480}{2160} = \frac{1482}{2160}$

c-) $P(Y/1) = \frac{P(Y \cap 1)}{P(1)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

d-) $P(1/Y) = \frac{P(1 \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10}}{\frac{113}{360}} = \frac{4}{30} \cdot \frac{360}{113} = \frac{48}{113}$

Q2: Bir okulda öğrencilerden, erkeklerin %60, kızların %40'ı 180 cm'den uzundur. Öğrencilerden %60'ı kızdır. Rasgele seçilen bir öğrenci 180 cm'den uzun ise bu öğrencinin kız olması olasılığı nedir?



$$P(K|U) = \frac{P(K \cap U)}{P(U)} = \frac{0.40 \times 0.1}{(0.40 \times 0.1) + (0.60 \times 0.04)} = 0.273 //$$

Q3: 3 kutunun durumu aşağıdaki gibi verilmiştir

- | | | | |
|---------|------------|----------|----------------|
| 1. kutu | 4'ü yanmış | 10 ampül | $\frac{4}{10}$ |
| 2. kutu | 1'ü yanmış | 6 ampül | $\frac{1}{6}$ |
| 3. kutu | 3'ü yanmış | 8 ampül | $\frac{3}{8}$ |

Rasgele 1 kutu ve ampül seçilirse,

- Yanmış } olasılıklarını hesaplayınız.
- Saglam }
1. Kutudan seçildiği bilindiğine göre ~~yanmış~~ yanmış olma olasılığı,
- Yanmış olduğunu bildiğimizde göre 1. kutudan gelme olasılığı.

Bayes Thm

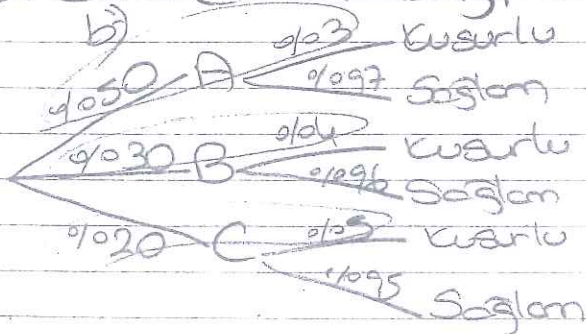
Bayes kurallı bir olayın ortaya çıkmasında 1'den fazla bağımsız neden etkili olduğunda bu nedenlerden herhangi birinin o olayı ortaya çıkarma olasılığının hesaplanmasında ve olasılıklar ile ilgili karar vermede kullanılır.

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i/B)}{\sum P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

Ör: A, B ve C gibi üç makine bir fabrikada ürünleri sırasıyla %50, %30 ve %20 oranlarda üretmektedir. Bu makineler %3, %4 ve %5 oranlarında bozuk ürün vermektedir. Buna göre;

a) Rasgele seçilen bir ürünün bozuk olma olasılığı,

b) Bozuk olduğu bilindiğine göre A makinesinden üretilme olasılığı nedir?



$$\begin{aligned} a-) P(K) &= (0.50 \times 0.03) + (0.30 \times 0.04) + (0.20 \times 0.05) \\ &= 0.037 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b-) P(A/K) &= \frac{P(A \cap K)}{P(K)} = \frac{0.50 \times 0.03}{0.037} = \frac{0.015}{0.037} \\ &= 0.405 \end{aligned}$$

Q21'den 10'a kadar (10 dahil) numaralandırılmış topkiler arasında rasgele olarak seçilen bir sayının 3 ile bölünebilirliği bilindiğine göre, bu sayının 2 ile bölünebilirliği olasılığı nedir?

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{3, 6, 9\} \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{3} = \frac{1}{3} //$$

Q22) Düzenli sefer yapan bir uçuş için uçağın zamanında kalkma olasılığı 0.83, zamanında varma olasılığı 0.82, olup hem zamanında kalkması hemde zamanında kalkma olasılığı 0.78'dir. Buna göre,

i) Uçağın kalkış saati verildiğine göre zamanında varma olasılığı nedir?

ii) Varış saati bilindiğine göre zamanında kalkma olasılığı nedir?

$$K = \{\text{zamanında kalkma}\} \quad P(K) = 0.83$$

$$V = \{\text{zamanında varış}\} \quad P(V) = 0.82$$

$$i) P(V|K) = \frac{P(V \cap K)}{P(K)} = \frac{0.78}{0.83} = 0.9398 //$$

$$ii) P(K|V) = \frac{P(K \cap V)}{P(V)} = \frac{0.78}{0.82} = 0.9512 //$$

$$(ii) \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5!}{1!(5-1)!} \cdot \frac{10!}{2!(10-2)!}}{\frac{15!}{3!(15-3)!}} = \frac{5 \cdot 45}{655}$$

$$(iii) P(B) = 1 - P(A) = \frac{225}{655}$$

$$P(B) = \frac{1}{(9!)} - \frac{24}{9!} = \frac{67}{9!} = 0.49\%$$

-Kosullu Olasılık-

Bir "B" olayı "A" olayından sonra gerçekleşiyorsa "B" olayının gerçekleşmesi olasılığına kosullu olasılık denir. $P(B/A)$ ile gösterilir.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{n(B \cap A)}{n(A)}$$

• A olayı B olayından sonra gerçekleşiyorsa,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

* $P(B/A)$ = A gerçekleştiğinden sonra B'nin olma olasılığı.

Q2: Bir zar 100 kere atılıyor. Aşağıdaki
çizelgede 6 zar sayısının ve her gelen
sayının sıklığı gösteriliyor. Buna göre;

(i) 3'ün gelme

(ii) 5'in gelme

(iii) asal sayı gelme

(iv) Çift ve asal sayı gelme olasılığını bul

Sayı	1	2	3	4	5	6
Sıklık	14	20	18	15	16	

$$A = \{2, 3, 5\}$$

$$(i) P(3) = \frac{20}{100} //$$

$$(iii) P(A) = \frac{20+18+15}{100} = \frac{53}{100}$$

$$(ii) P(5) = \frac{15}{100} //$$

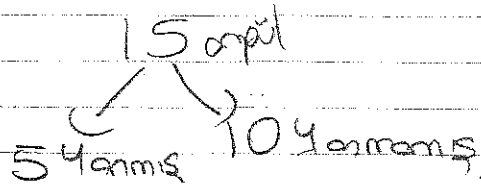
$$(iv) P(2) = \frac{17}{100} //$$

Q3: 5'i yarmış olan 15 arpa'dan 3'sü rasgele
seçiliyor.

(i) Her birinin yarmış olma (A)

(ii) Yalnız birinin yarmış olma

(iii) En az birinin yarmış olma olasılığını bul



$$(i) \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{10!}{3!(10-3)!}}{\frac{15!}{3!(15-3)!}} = \frac{120}{655} = \frac{24}{91}$$

Q2: Bir poker oyununda 5 karttan 2'sinin 4'si
3'ünün vade gelme olasılığı nedir?
(4) seçim (kombinasyon)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{6 \cdot 4}{2598960} = \frac{24}{2598960}$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2598960$$

Q2: Serhat endüstri mühendisliğinden bu dönem
mezun olacaktır. İsteddiği 2 sırtelle görüş-
tüketen Sara A sırtelinden tetra görüş-
meye geçilme oranı %0.80, B sırtelinden
geçilme oranı ise %0.60 olarak düşünülmektedir. Her iki sırtelden görüşmeye
geçilme olasılığını ise %0.50 olarak de-
ğerlendirmektedir. Buna göre en az bir sırtel-
ten geçilme olasılığı nedir?
A ∪ B (veya)

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.80 + 0.60 - 0.50 \\ &= 0.90 \end{aligned}$$

Q Bir zar atma deneyinde, A olayını {Çift rakamların gelmesi}, B olayını {3'e tam bölünebilen sayıların gelmesi} olarak tanımlasak,

a) $P(A)$, $P(B)$ ^{$A \cup B$}

b) Çift rakam ^{$A \cup B$} 3'e bölünebilme olasılığı?

c) Çift rakam ^{$A \cap B$} 3'e bölünebilme olasılığı?

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(zar atma)

$A \cap B = \{6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{3, 6\}$

a) $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} //$

$P(B) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} //$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$

$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$

$= \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$= \frac{4}{6} //$

c) $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6} //$

(Seçme = kombinasyon)

③ Kombinasyon

Birbirinden farklı n elemanın r tanesi alınarak sıra gözlemlenmeden yapılan seçime kombinasyon denir ve,

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ formülüyle hesaplanır}$$

(Sıra ile dikkatli değildir)

Ör: 3 kişiden 2 kişiyi seçilerek kaç yolla seçer bilmiyoruz? (kombinasyon)

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3 //$$

ab
bc
ac

Ör: Bir komitede 9 kişilik bir gruptan 5 kişilik kaç değişik yolla seçilir?

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126 //$$

* Olasılık rastlantı ya da kesin olmayan olaylara uğrasın ve bir A olayının olasılığı $P(A)$ ile gösterilir

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$n(A)$ = A'da gerçekleşen olayların sayısı

$n(S)$ = S'de (örnek uzayı) gerçekleşen olayların sayısı

veya

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

A ve B ayrık olaylar ise $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
($A \cap B = \emptyset$)

(Sıralama = permutasyon)

Q2: 2 adet zarın atılmasında dnet uzayında toplam olarak kaç adet dnet noktası vardır?

1. zarın atılmasında $n_1 = 6$

2. zarın atılmasında $n_2 = 6$

$n_1, n_2 = 6 \cdot 6 = 36$ adet toplam dnet noktası vardır.
(1,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,4) ...

② Permutasyon

n elemanın birbirinden farklı düzenlenmesine "permutasyon" denir. (Sıralama dnenidir)

n elemandan r tane alınarak yapılan permütasyon,

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Q2: ^{a,b,c} 3 kişiye 2 farklı yere kaç farklı yolla sıralanabilir?
(permutasyon)

$$P_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1!} = \frac{6}{1} = \underline{\underline{6}} \text{ farklı şekilde Sıralanır.}$$

$\left. \begin{array}{l} cb \\ bc \\ ab \\ ba \\ ca \\ ac \end{array} \right\}$

Q2: 7 farklı kitap arasından 3 farklı kitap bir kitaplık için 3 boş yer kaç farklı şekilde yerleştirilebilir

$$P_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210 //$$

Ör: Hilesiz bir zar atılsın. A ve B olayları aşağıdaki gibi tanımlansın,

A: Üste gelen sayının 4'ten küçük olması.

B: Üste gelen sayının çift olması.

a) $\bar{A}$ olayı

b) $A \cap B$ ve $A \cup B$ olayları hangi sonuç noktalarından oluşur

c) A ve B aynı olaylardır?

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$a) \bar{A} = \{4, 5, 6\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$

$$b) A \cap B = \{2, 3\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$c) A \cap B \neq \emptyset$$

A ve B aynı olaylar değildir.

- Sayma Kuralları -

1) Çarpma Kuralı

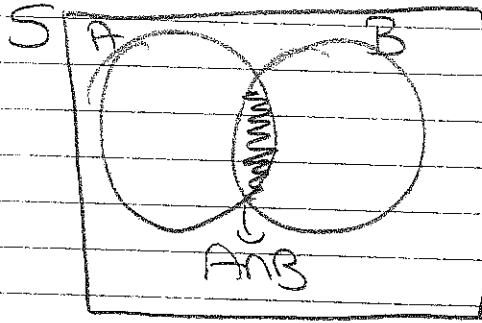
Eğer bir deneyde birden fazla aşama (adım) varsa bu deneydeki toplam sonuç sayısı, her bir aşamadaki sonuç sayılarının çarpımına eşittir.

Örneğin bir deneyde 1. aşamada n_1 , 2. aşamada n_2 ve 3. aşamada n_3 sonuç olmak üzere toplam sonuç sayısı $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ 'tür.

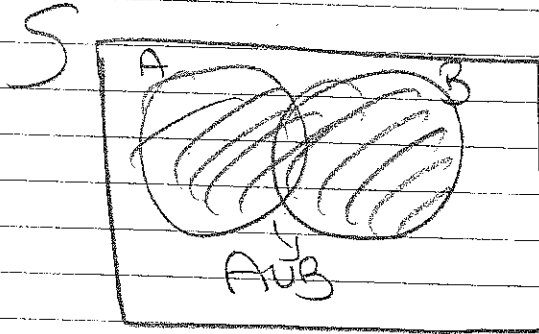
- Olaylar Üzerinde İşlemler -

S örnek uzayı, A ve B iki olay olsun.

- A ve B olaylarının her ikisine birden ait olan örnek noktalarının oluşturduğu kümeye $A \cap B$ (A kesişim B) kesişimi denir.

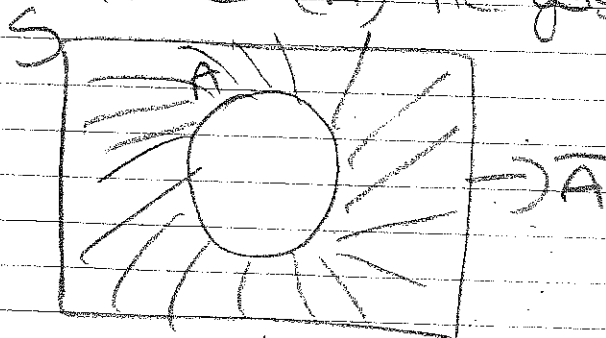


- A ve B olaylarından en az birine ait olan örnek noktalarının oluşturduğu kümeye $A \cup B$ (A ile B birleşim) kesişimi denir ve $A \cup B$ ile gösterilir.



- $A \cap B = \emptyset$ olan olaylara "ayrık olaylar" denir.

- S örnek uzayında A bir olay olsun. A ile bulunmayan S içinde bulunan tüm örnek noktalarının oluşturduğu olaya "A olayının tamamlayıcı" denir ve (A) ile gösterilir.

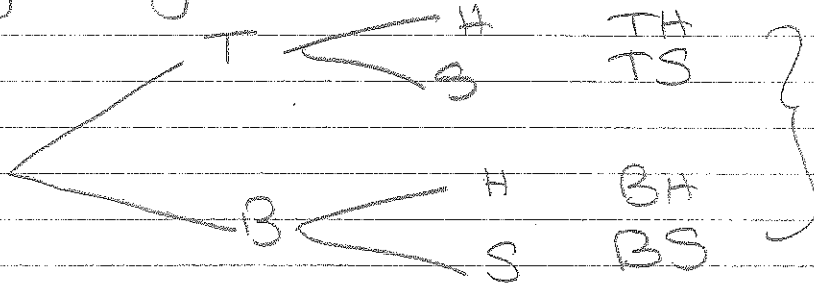


Q1 Bir öğrenil eğitim-öğretim yılının ilk döneminde Sanat Tarihi(T) ya da Beden Eğitimi(B) derslerinden yalnız birini, ikinci dönemde ise Halk Dansları(H) ya da Salon Dansları(S) derslerinden yalnızca birini seçmeli ders olarak seçmek zorundadır.

a- Örnek uzayını tamamlayınız.

b- Bu deneyi ilave ediniz.

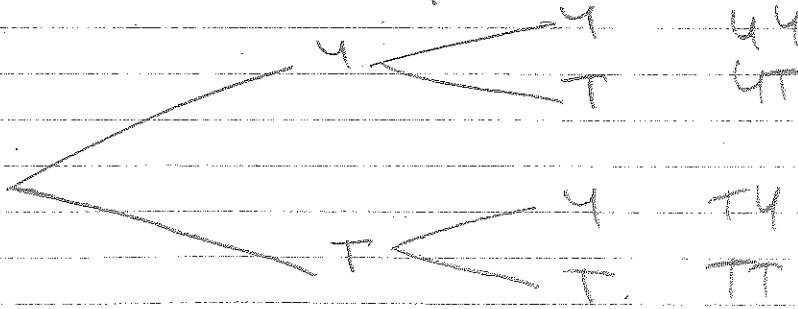
A: öğrenimin ilk dönem sanat tarihi dersini seçmes?
dayı hangi örnek noktalarını içerir?



a- $\Omega = \{TH, TS, BH, BS\}$
(örnek uzay)

b- $A = \{TH, TS\}$

Q2 Hilesiz bir para 2 defa atılsın.



② - Olasılık -

Olasılık kavramı, belirli sonuçlara ilişkin belirsizlikleri ölçmek için metodlar sağlamasının yanı sıra belirli bir durum altında doğru ve sağlıklı kararlar verebilmede yardımcı olur.

- Deney, örnek nokta ve örnek uzay;

İyi tanımlanmış belirli gözlemlerle yapılan eylem veya süreç "deney" denir. Rassal deneyin en temel sonucuna "örnek nokta" ve tüm örnek noktaların bulunduğu kümeye "örnek uzay" denir.

Q1: Hilesiz bir para atılması durumu ele alalım.
Deney

Örnek nokta: Yazı (Y) ve Tura (T) bu deneyin örnek noktalarıdır.

$$S = \{Y, T\}$$

(örnek uzay)

Q2: Hilesiz bir zar atılması durumu ele alalım.
Deney

Örnek noktaları: 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Örnek uzayın her altkümeye "olay" denir.

A: Zarın üst yüzeyindeki sayının çift olması.

$$A: \{2, 4, 6\}$$

- Değişim Katsayısı -

Farklı serilerin değişkenliklerinin karşılaştırılmasında farklı birimlerle ölçülmüş veri setleri söz konusu olduğundan standart sapma kullanışlı değildir. Bu yüzden, gösterim değerlerinin büyüklüklerinden kaynaklanan farklılığın ortadan kalması için Değişim Katsayısı kullanılır.

Örnekte: $D.K. = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100$

Örnekte: $D.K. = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100$

ÖR: Aşağıda verilen 2 serinin değişkenliğini değişim katsayısı ile karşılaştırınız. örneklem olarak alık!

x_i	y_i
4	3
7	7
11	15
15	16
18	20

→ A.O

$$\bar{x} = \frac{3+7+15+16+20}{5} = 12.2$$

$$S_y = 6.98$$

$$D.K. = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100$$

$$= \frac{6.98}{12.2} \cdot 100 = \%57.21$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4+7+11+15+18}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = 5.7$$

$$D.K. = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{5.7}{11} \cdot 100 = \%51.82$$

Sonuç: Buna göre y serisinin değişkenliği daha fazladır.

* Gruplandırılmış Serilerde Varyans ve Std. Sapma Hesabı

Anakütle: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i (m_i - M)^2}{N}$, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N f_i (m_i - M)^2}{N}}$

Örnekten: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}$, $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Örnek: Bir ~~hava~~ hava almasına gelen uçaklardan 100 binimlik örnekten serilerde hava uçağı-
mında geçtikleri molenmistir. Uçakların
geçtikleri süreleri aşağıdaki tabloda ve-
rilmistir. Uçaklar için geçtikleri sürelerine ila-
kan std. sapmayı hesaplayınız

x_i Uçakların geçtikleri süreleri (dk)	f_i Uçak Sayısı	m_i	$m_i f_i$	$(m_i - \bar{x})$	$(m_i - \bar{x})^2$
0-10 dk	29	5	145	-17.3	299.29
10-20 dk	23	15	345	-7.3	53.29
20-30 dk	17	25	425	2.7	7.29
30-40 dk	14	35	490	12.7	161.29
40-50 dk	11	45	495	22.7	515.29
50-60 dk	6	55	330	32.7	1069.29
	Σ 100		2230		

$\bar{x} = \frac{\sum m_i f_i}{n} = \frac{2230}{100} = 22.3$

$s = \sqrt{\frac{\sum f_i (m_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{26371}{100-1}}$
 $= \sqrt{\frac{26371}{99}}$
 $= \sqrt{266.17}$
 $= 15.69$

$f_i (m_i - \bar{x})^2$
299.29
53.29
7.29
161.29
515.29
1069.29
Σ 26371

* Frekans Serilerinde Varyans ve Std. Sapma Hesabı

Formüller: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot (x_i - M)^2}{N}$, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N f_i \cdot (x_i - M)^2}{N}}$

Örnekleme: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$, $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Örnek: Aşağıdaki tabloda 5 farklı mühendislik bölümlerinden rasgele olarak seçilen öğrenciler için ortalama puanlar (örnek) verilmektedir. Buna göre ortalama puanın std. sapmasını bulunuz.

Bölümler	Ortalama Puan	Ortalama Puan Sayısı	$x_i \cdot f_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
Gıda	2.88	58	167.04	0.08	0.0064
Elektrik-Elektronik	2.76	32	88.32	-0.04	0.0016
Bilgisayar	2.82	30	84.6	0.02	0.0004
Kimya	2.70	46	124.2	-0.1	0.01
Çeşitli	2.80	+45	+126	0	0
		$n=211$	590.16		

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{590.16}{211} = 2.8$$

Örnekleme

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0.8944}{211-1}} = \sqrt{0.0046} = 0.069$$

$f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
58 x 0.0064
0.3712
0.0512
0.012
0.46
+0
0.8944

Ör: 8 öğrencinin herhangi bir dersin aldığı puanlar aşağıda verilmiştir. Öğrencilerin aldığı puanlara ilişkin varyansı ve std. sapmasını hesaplayınız. (N=8)

x_i : 55 62 68 72 75 80 83 85

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{55+62+68+72+75+80+83+85}{8} = \frac{577}{8} = 72,5$$

x_i	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$
55	-17,5 (55-72,5)	306,25 (17,5) ²
62	-10,5	110,25
68	-4,5	20,25
72	-0,5	0,25
75	2,5	6,25
80	7,5	56,25
83	10,5	110,25
85	12,5	156,25
		<u>766</u>
		$766 = \sum (x_i - \mu)^2$

Örnek:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} = \frac{766}{8} = 95,75$$

(varyans için)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}} = \sqrt{95,75} = 9,79$$

(std. sapma için)

3-) Değişkenlik (Dağılım) Ölçüler:

Varyans

Standart Sapma

Değişim Katsayısı

σ^2 : eurenin varyansı

σ : eurenin standart sapması

s^2 : örneğin varyansı

s : örneğin standart sapması

① - Standart Sapma ve Varyans -

Gözlemlerin verilerin aritmetik ortalamadan sapmalarını gösteren ölçülerdir.

* Basit Serilerde Varyans ve Standart Sapma Hesabı

Anakütle: $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M)^2}{N}$, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - M)^2}{N}}$

Örneklem: $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$, $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

Varyans
ifini

Standart
Sapma ifini

iii) Gruplandırılmış Sıklarda Mod

$$\text{Mod} = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot h$$

L : mod sınıfının alt sınırı

Δ_1 : mod sınıfının frekans ile önceki sınıfın arasındaki fark.

Δ_2 : Mod sınıfının frekans ile ondan sonraki frekans arasındaki fark.

h : Sınıf genişliği

ÖR: Aşağıdaki serinin modu hesaplayın.

Sınıflar	f_i
0-8' den az	12
8-16' den az	23
16-24' den az	32
24-32' den az	20
32-40' den az	13
	<u>100</u>

$$\Delta_1 = 32 - 23 = 9$$

$$\Delta_2 = 32 - 20 = 12$$

$$\text{Mod} = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot h$$

$$\text{Mod} = 16 + \frac{9}{9+12} \cdot 8$$

$$= 16 + \frac{9}{21} \cdot 8$$

$$= 16 + 0.43 \cdot 8$$

$$= 16 + 3.44$$

$$= 19.44$$

Q2: Aşağıdaki tabloda yer alan verilerin medyanı hesaplayınız.

Sınıf aralığı	f_i	Birlikli frekans
10-20'den az	23	23
20-30'den az	32	55
30-40'den az	33	90
40-50'den az	10	100
	$n=100$	

$100 / 2 = 50$ (Birlikli frekans göre)

Medyan = $L + \frac{hm}{fm} \cdot (0,5 \times n - fa)$

Medyan = $20 + \frac{10}{32} (0,5 \times 100 - 23)$

= 28.44

*MOD (En yüksek frekans mod sınıfıdır.)

En sık ortaya çıkan frekansa sahip dıdır.

ii) Basit Seri ve Frekans Serisinde mod

Q3: Aşağıda Gösterimde bulunan 24 öğrencinin harcamaları verilmiş (bir aylık) verilerin modunu hesaplayınız

965 1005 1030 1005 1042 975 975 955
975 965 1030 1030 955 965 1005 1015
1000 975 995 1042 1042 1000 975 1015

f	1	1	1	1	1	1	1	1
x	965	975	995	1005	1030	1042	1042	1015

ii-) Frekans Serilerinde Medyan

Frekans serilerinde medyan hesaplanırken sınırlanmış verilerin eklenmeli frekansları dikkate alınır ve ortanca yer alan gözlem değeri belirlenir.

Ör: Bir işletmede çalışan 100 işçinin kullandıkları yıllık izinler aşağıda verilmiştir. Kullanılan yıllık izinlere ilişkin medyan değerini bul.

Kullanılan izin (gün)		İçerisi	Eklenmeli frekans
10	15	18	18
20	20	32	50
25	25	30	80
		50	100

$$\text{Medyan} = \frac{X_{n/2} + X_{n/2+1}}{2} = \frac{X_{50} + X_{51}}{2} = \frac{15 + 20}{2} = 17.5 //$$

iii-) Gruplandırılmış Serilerde Medyan

$$\text{Medyan} = L + \frac{hm}{fm} \cdot (0.5 \cdot n - fa)$$

L: medyanı içeren sınıf aralığının alt sınırı

n: toplam frekans

fa: medyan sınıfından önceki tüm sınıfların frekansları toplamı

fm: medyanı içeren sınıfın frekansı

hm: medyan sınıfının büyüklüğü

* MEDYAN

Gözlem değerleri küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortada kalan gözlem değeri medyandır ve medyan, ölçümlerin %50'sinin üzerinde, %50'sinin altında yer aldığı merkezi değerdir.

1-) Basit Serilerde Medyan

Örnek: 40 gün gün ve saatlerde bir alışveriş merkezinden rasasal olarak seçilen 5 müşterinin kasabarda bekleme zamanı ile ilgili verilmıştır. Müşterilerin bekleme zamanlarının medyanını bulunuz.

15 16 11 12 6

$$\text{Medyan} = \begin{cases} \frac{X_{n+1}}{2}, & n \text{ tek ise} \\ \frac{X_{n/2} + X_{n/2+1}}{2}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$$

6 11 12 15 16 $n=5$ tek
 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

$$X_{\frac{n+1}{2}} = \frac{X_{5+1}}{2} = X_{\frac{6}{2}} = X_3 = 12 //$$

Örnek: $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \\ 86 & 78 & 90 & 62 & 73 & 89 & 92 & 84 & 95 & 76 \\ 62 & 73 & 76 & 78 & 84 & 86 & 89 & 90 & 92 & 95 \end{matrix}$

$n=10$ çift

$$\frac{X_{n/2} + X_{n/2+1}}{2} = \frac{X_{10/2} + X_{10/2+1}}{2}$$

$$= \frac{X_5 + X_6}{2} = \frac{84 + 86}{2} = 85 //$$

ii) Rekans Serileri İsm A.A.O.

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot t_i \cdot f_i}{\sum t_i \cdot f_i}, \quad \sum f_i = N$$

$$\bar{X}_t = \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot t_i \cdot f_i}{\sum t_i \cdot f_i}, \quad \sum f_i = n$$

Ör (örnek)

Bir işletmede çalışanlar 12 tecrübe kente göre ücretlendirilmiştir. Bu veriler serisine göre ücretlerin ağırlıklı A.O'nı bulunuz.

Günlük Ücret (₺)	İşçi Sayısı	Tecrübe	$x_i \cdot t_i \cdot f_i$	$t_i \cdot f_i$
10	10	2	200	20
20	8	4	640	32
30	5	5	750	25
40	1	8	320	8

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot t_i \cdot f_i}{\sum t_i \cdot f_i} = \frac{200 + 640 + 750 + 320}{20 + 32 + 25 + 8} = \frac{1910}{85}$$

$$= 22,47 \text{ ₺}$$

iii) Gruplandırılmış Serilerde A.A.O

$$M_t = \frac{\sum m_i \cdot t_i \cdot f_i}{\sum t_i \cdot f_i}, \quad \sum f_i = N$$

$$\bar{X} = \frac{\sum m_i \cdot t_i \cdot f_i}{\sum t_i \cdot f_i}, \quad \sum f_i = n$$

* Ağırlıklı (Tartılı) Aritmetik Ortalama

Bazen gözlem değerlerinin tümü aynı değere sahip olmayabilir. Bu durumda gözlem değerleri tartılandırılır.

1-) Basit Serilerde A.A.O.

$$M_t = \frac{\sum_{i=1}^k x_i t_i}{\sum t_i}$$

$$\bar{X}_t = \frac{\sum x_i t_i}{\sum t_i}$$

} t_i ağırlıkları gösterir

Örnek: Bir öğrencinin simula girdiği derslerin öğrenme dereceleri farklı ise ort. hesabında derslerin öğrenme derecelerinin göz önüne alınması gerekir. Kabul edelim ki bir öğrenci için aşağıdaki veriler vardır. Buna göre bu öğrenci için A.A.O'yı hesaplayınız.

Ders	t_i Ağırlık	x_i Puan	$x_i t_i$
A	3	30	90
B	2	45	90
C	2	25	50
D	1	40	40
E	4	15	60
F	2	6	12
G	2	55	110

$$\sum t_i = 3+2+2+1+4+2+2 = 16$$

$$A.A.O. = \frac{\sum x_i t_i}{\sum t_i} = \frac{90+90+50+40+60+12+110}{16}$$

$$= \frac{452}{16} = 28.25$$

ÖR: Bir ampul fabrikasının rasal olarak seçilen 20 ampulün ömrü ölçülmüş ve aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Ampul Ömrü (Ay)	Ampul Sayısı	$x_i \cdot f_i$
10	3	30
20	5	100
30	8	240
40	3	120
50	1	50
	<u>20</u>	

Bu ampullerin ortalama ömrünü bulunuz.

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n} = \frac{30 + 100 + 240 + 120 + 50}{20} = \frac{540}{20} = 27 \text{ ay}$$

*** Gruplandırılmış Serinin A.O. Hesaplanması

$$M = \frac{\sum m_i \cdot f_i}{n}, \quad m_i: i. \text{ sınıf aralığının orta noktası}, \quad f_i: i. \text{ sınıf aralığının frekansı}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum m_i \cdot f_i}{n}, \quad k: \text{ sınıf sayısı}$$

ÖR: Yüksek lisans ve/veya mezunların 40'ünün aylık gelirleri aşağıda verilmiştir. Bu amerken der-
gerleme göre ort. aylık geliri hesaplayınız.

Aylık Gelir (₺)	Mezun Sayısı	m_i (orta noktası)	$m_i \cdot f_i$
1000-2000 'deniz	6	1500 $\frac{1000+2000}{2}$	9000 (1500 x 6)
2000-3000 'deniz	10	2500 $\frac{2000+3000}{2}$	25000 (2500 x 10)
3000-4000 'deniz	15	3500	52500 (3500 x 15)
4000-5000 'deniz	7	4500	31500 (4500 x 7)
5000-6000 'deniz	2	5500	11000 (5500 x 2)
	<u>40</u>		

$$\bar{X} = \frac{\sum m_i \cdot f_i}{n} = \frac{9000 + 25000 + 52500 + 31500 + 11000}{40} = 3225$$

* Basit Serilerde Aritmetik Ortalama Hesaplaması

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Ör: 6 öğrencinin kayıtlı olduğu bir sınıfta ^{aritmetik} alınan final notları aşağıdaki gibidir. Öğrencilerin final notlarının A.O. nı bulunuz.

$$x_i: 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \quad 70 \quad 80 \quad (N=6)$$

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{30+40+50+60+70+80}{6} = 55 //$$

Ör: Büyük bir mağazada geçen yıl hesaplarından $n=5$ birimlik bir örnek alınmış ve veriler ₺ cinsinden aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$x_i: 18 \quad 28 \quad 41 \quad 55 \quad 78 \quad (n=5)$$

Bu örneğin aritmetik ortalamasını bulunuz.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{18+28+41+55+78}{5} = 44 \text{ ₺} //$$

* Frekans Serilerinde Aritmetik Ortalama Hesaplanması

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{N}, \quad \sum f_i = N$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{n}, \quad \sum f_i = n$$

2-Merkezî Eğilim ve Dağılım Ölçüleri

- Basit Seri: İşleme girmemiş veri serisi
- Frekans Serisi: Gruplandırılmamış frekans dağılımı
- Gruplandırılmış Seri: Gruplandırılmış frekans dağılımı

~Merkezî Eğilim Ölçüleri

Nürel dağılımlarda kullanılacak ölçüler dağılımın odaklaşma noktasını göstermektedir. Bu tür ölçüler merkezî eğilim ölçüleridir. Bunlar;

1- Ortalamalar (Aritmetik Ort., Tartılı Arit. Ort.)
(Ağırlıklı)

2- Medyan

3- Mod

*Aritmetik Ortalama

Verilerin en çok hangi değer etrafında toplandığını gösterir.

μ : anakütle (kuren)'in aritmetik ortalaması

$\bar{X}$: örneklemin aritmetik ortalaması.

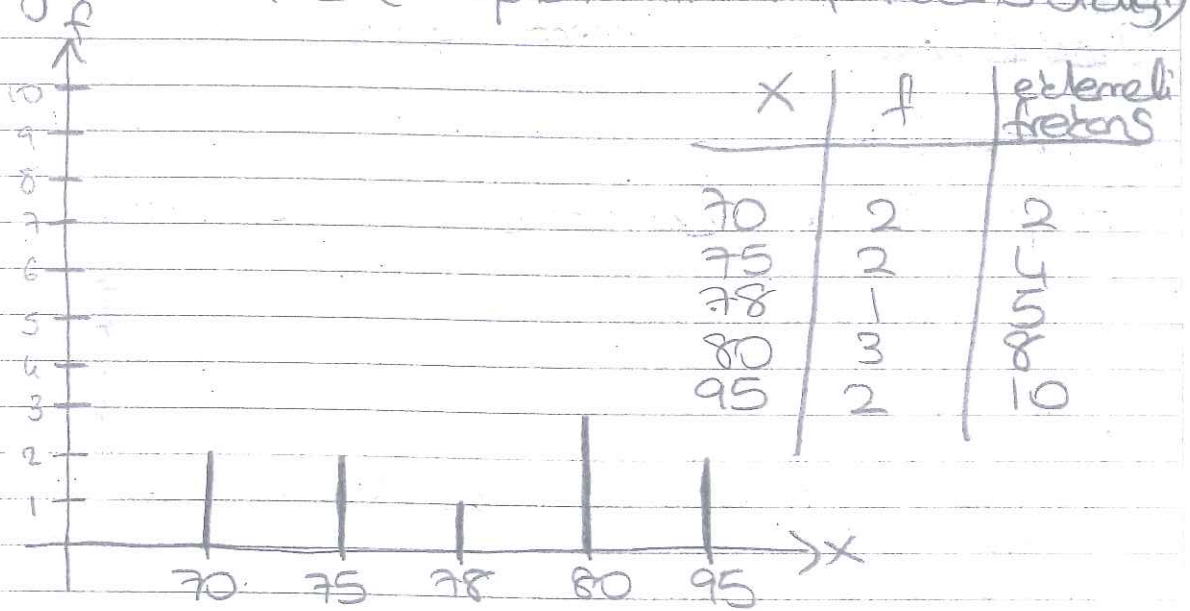
N : Anakütle hacmi

n : Örneklemin hacmi

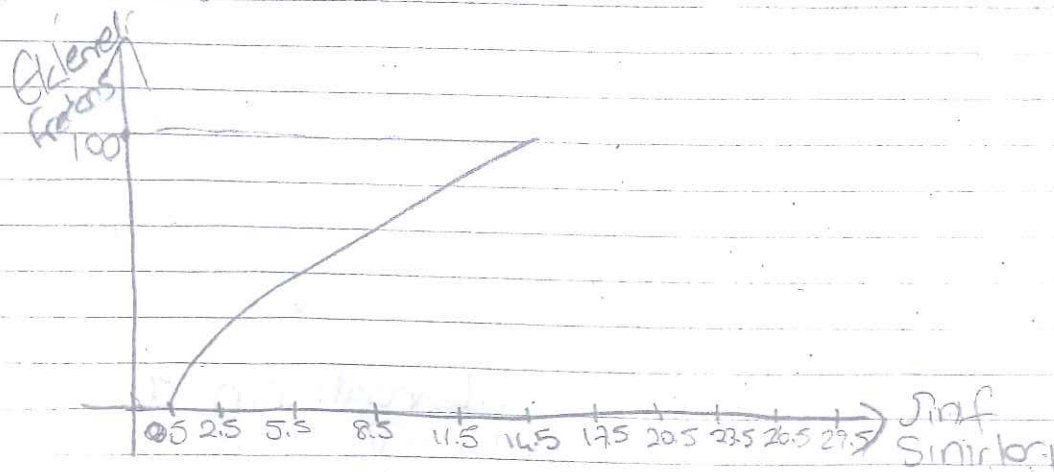
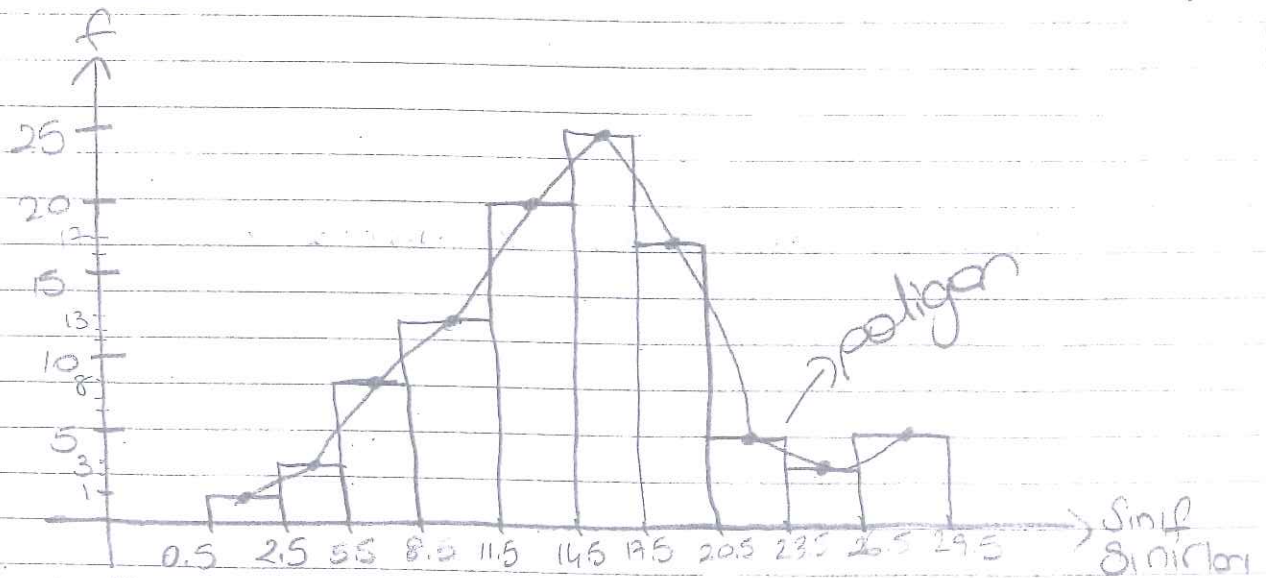
x_i : veri setindeki değerler

Grafiksel Gösterimler

a-) Çizgisel Grafik (Gruplandırılmış Frekans Sıklığı)



b-) Histogram (Gruplandırılmış Frekans Dağılımı)



Sınıf No	Sınıf limitleri	Sınıf Sınırları	Gözetim Sayısı (f)	Sınıf ortanca	Ekleneli frekans
1	0-2	$\frac{0+2}{2}$	-0.5-2.5	1	1
2	3-5	$\frac{3+5}{2}$	-2.5-5.5	3	4
3	6-8	$\frac{6+8}{2}$	-5.5-8.5	8	12
4	9-11	$\frac{9+11}{2}$	-8.5-11.5	13	25
5	12-14	$\frac{12+14}{2}$	-11.5-14.5	20	45
6	15-17	$\frac{15+17}{2}$	-14.5-17.5	25	70
7	18-20	$\frac{18+20}{2}$	-17.5-20.5	17	87
8	21-23	$\frac{21+23}{2}$	-20.5-23.5	5	92
9	24-26	$\frac{24+26}{2}$	-23.5-26.5	3	95
10	27-29	$\frac{27+29}{2}$	-26.5-29.5	5	100
			$\Sigma = 100$		

6-8 Milyon TL arası
satış yapan 8 satış
elemanı vardır.

17 Milyon TL den
az satış yapan
70 satış elemanı
vardır.

11 Milyon TL den
az satış yapan 25
satış elemanı vardır.

Sınıf No	Sınıf limitleri	Gözetim Sayısı	Oransal Frekans	Gözetimin Yüzdesi	Ekleneli Frekans	Oransal ekleneli frekans	DEF Yüzdesi
1	0-2	1	1/100	%1	1	1/100	%1
2	3-5	3	3/100	%3	4	4/100	%4
3	6-8	8	8/100	%8	12	12/100	%12
4	9-11	13	13/100	%13	25	25/100	%25
5	12-14	20	20/100	%20	45	45/100	%45
6	15-17	25	25/100	%25	70	70/100	%70
7	18-20	17	17/100	%17	87	87/100	%87
8	21-23	5	5/100	%5	92	92/100	%92
9	24-26	3	3/100	%3	95	95/100	%95
10	27-29	5	5/100	%5	100	100/100	%100
		$\Sigma = 100$		$\Sigma = 100$			

> 9-11 Milyon TL
arası satış yapanlar
sirketin %13'üdür.

Satış elemanlarının %45'i
14 Milyon TL den az satış
yapmıştır.

Soru: Büyük bir şirketin 100 satış elemanı vardır. Her bir satış elemanı tarafından gerçekleştirilen aylık satışlar verilmiştir. Bu verilerin frekans tablosunu düzenleyiniz. (Milyon TL)

0	12	16	19
3	13	16	19
5	13	16	19
5	13	16	19
6	13	16	20
7	13	16	20
7	13	16	20
8	13	16	20
8	13	16	20
8	14	16	20
8	14	16	20
8	14	17	20
9	14	17	21
9	14	17	21
9	14	17	22
9	14	17	22
9	14	17	23
9	14	17	24
10	14	17	25
10	14	17	26
10	15	18	27
11	15	18	27
11	15	19	27
11	16	19	27
11	16	19	29

$$n=100$$

① $n=100$

② $L=29, S=0$

③ $\sqrt{100} = 10 \leq k$
10, 11, 12, ...

④ $\frac{L-S}{k} \leq h = \frac{29-0}{10} = 2.9 \leq 3$ $\boxed{h=3}$

⑤ $0 - \dots - 29$ $\boxed{3}$

- Gruplandırılmış Frekans Dağılımı

I. Adım: Gözlemlerin sayısı belirlenir.

II. Adım: En büyük (L), en küçük (S) değer bulunur.

III. Adım: Sınıf sayısı bulunur. $\sqrt{n} \leq k$ (k=katsayı),
sınıf sayısı k ile gösterilir.
(yada $k = 1 + 3.3 \log n$ yaklaşımında
kullanılabilir.)

IV. Adım: Sınıf genişliği (h) belirlenir.

$$\frac{L-S}{k} \leq h \text{ eşitsizliği terel alınır.}$$

V. Adım: Sınıf limitleri bulunur.

VI. Adım: Sınıf sınırları belirlenir.

$$i. \text{ Sınıfın üst sınıf sınırı} = \frac{i \text{ sınıfın üst limiti} + \text{bir sonraki sınıfın alt limiti}}{2}$$

VII. Adım: Sınıf frekansı belirlenir.

VIII. Adım: Sınıf orta noktası belirlenir.

IX. Adım: Ekleneli frekanslar bulunur.

- Bazı Kesikli Olasılık Dağılımları - (Saygıbbi)

① Bernoulli Dağılımı

Bir X rasgele değişkeni için yalnız iki sonuç varsa (başarılı / başarısız) bu değişkene Bernoulli değişkeni denir.

Ör Para atılması X : Tura'nın sayısı

Bir kutuda bulunan kusurlu ve kusursuz parçalardan 1 tane seçilme. Kusurlu - başarılı
kusursuz - başarısız.

② Binom Dağılımı

Birbirinden bağımsız n Bernoulli denemesi için X her bir denemede başarı olasılığı p , başarısızlık olasılığı $(1-p)$ olan binom rasgele değişkeni ise, X 'in olasılık fonksiyonu:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Bu dağılıma binom dağılımı denir. (Bu dağılımda denemeler birbirinden bağımsızdır. Her bir deneme için sadece 2 sonuç vardır.)

X
(Başarılı ve
Başarısızlık)

Ör Paranın Likide atılması X : Tura'nın sayısı

Bir kutuda bulunan kusurlu ve kusursuz parçalardan 5 tane seçilmesi X : Seçilen kusurlu parçaların sayısı

Q1 Bir para 4 kez atılsın.

a) İki tura

b) Üç tura

c) En az ~~2~~ tura gelme olasılığı nedir?

X: Tura'nın Sayısı

Binom rasgele
değişkeni

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$n=4, p=\frac{1}{2} \text{ (tura gelme olasılığı)} \quad 1-p=\frac{1}{2}$$

$$a) P(X=2) = f(2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}$$

$$= \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$b) P(X=3) = f(3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-3}$$

$$= \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

c) 1, 2, 3, 4

$$P(X=1) = f(1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-1}$$

$$= \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$$

$$P(X=4) = f(4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-4}$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned}
 c) P(X \geq 1) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) \\
 &= \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} \\
 &= \frac{15}{16}
 \end{aligned}$$

Örnek 20 Parçanın bulunduğu bir çuvalda 5 parça kusurludur. Çekileni yine yerine koyarak 4 parça çekilmiştir. (denemelerin bağımsız)

a-) Bir tek kusurlu parça

b-) En ^{çok 1} kusurlu parça gelme olasılığı nedir
 X : kusurlu parçaların sayısı
 $n=4$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad a-) P(X=1) = f(1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{4-1} \\
 1-P &= \frac{3}{4} \quad = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{64} = \frac{27}{64}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\
 &= \frac{81}{256} + \frac{27}{64} = \frac{81+108}{256} = \frac{189}{256}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=0) &= P(0) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^{4-0} \\
 &= 1 \cdot 1 + \frac{81}{256} \\
 &= \frac{337}{256}
 \end{aligned}$$

Q23 2 yada ertek qout dagması olası
esit olgı - v sayımı ile 5 qoutla birlikte
2 ertek qout olmasi olası nedir?

X: ertek qoutların sayisi

$$\begin{aligned} n=5 \quad P(x=2) &= f(2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} \\ p &= \frac{1}{2} \\ 1-p &= \frac{1}{2} \\ &= \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{10}{32} // \end{aligned}$$

- Binom Rasgele Değişkeninin Beklenen
Değer ve Varyansı-

$$E(X) = n \cdot p$$

$$Var(X) = n \cdot p(1-p)$$

Q24 Bir para 4 kez atılsın.

a) İki tura b) Üç tura c) En az ~~2~~ 1 tura gelme
olasılığı nedir?

$$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \quad (X: \text{Turların Sayısı})$$

$$Var(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{4} = 1 //$$

Q23: aynı

$$f(x) = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$Var(X) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

- Hypergeometrik Dağılım

Hypergeometrik olasılık dağılımı, bir nesne ile yakından ilgilidir. Süt borusu ve olasılık dağılımı arasında bir ilişki vardır. Hypergeometrik olasılık dağılımında denemelerin bağımsız olmasıdır.

Q2: Bir kumru 5 beyaz ve 8 siyah 13 bilye vardır. İade edilmeden 3 bilye çekiliyor. Bu durumda X hipergeometrik rasgele değişkeni çekilen siyah (ya da beyaz) bilyelerin sayısıdır.

X rasgele değişkeninin hipergeometrik dağılımıdır. Nçeritten, n adet seçimlerin k tane başarılı olması ve $(n-k)$ tane başarısız olması durumunda,

$$P(X=x) = f(x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Ör: 12 kişilik bir yörenin kuruluna 7 kişi belirli bir konuda alınmaz karar tasarruflarının lehinde, 5 kişi aleyhinde düşünmektedir. Bu kurulda rasgele seçilen 4 kişilik komiteye de karar tasarruflarının lehinde düşünme üye sayısının,

a) 1 kişi olması

b) en fazla 1 kişi olması durumunun olasılığını

hesaplayınız.

X : lehinde düşünenlerin sayısı

$$N=12 \quad P(X=x) = f(x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$n=4$$

$$k=7$$

$$a) P(X=2) = f(2) = \frac{\binom{7}{2} \cdot \binom{12-7}{4-2}}{\binom{12}{4}} = \frac{\frac{7!}{2!(7-2)!} \cdot \binom{5}{2}}{\frac{12!}{4!(12-4)!}} = \frac{14}{33}$$

$$b) P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \frac{14}{33}$$

$$P(x=0) = f(0) = \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{12-7}{6-0}}{\binom{12}{6}} = \frac{2!}{0!6!} \cdot \frac{5!}{6!} = \frac{12!}{6!(12-6)!}$$

$$P(x=1) = f(1) = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{12-7}{6-1}}{\binom{12}{6}} = \frac{7!}{1!(7-1)!} \cdot \frac{5!}{6!} = \frac{12!}{6!(12-6)!}$$

Toplam cevap $\frac{19}{33}$

X, hipergeometrik rasgele değişken iken,

$$E(X) = \frac{n \cdot k}{N}$$

$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{n \cdot k}{N} \cdot \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

$$E(X) = \frac{6 \cdot 7}{12} = \frac{28}{12}$$

$$Var(X) = \frac{12-6}{12-1} \cdot \frac{6 \cdot 7}{12} \cdot \left(1 - \frac{7}{12}\right)$$

- Geometrik Dağılım

Bağımsız Bernoulli denemelerinin bir dizisinde her bir deneme için başarı olasılığı p ve ilk başarının elde edilmesi için gerekli denemelerin sayısı X rasgele değişkeni olsun. Bu takdirde X geometrik rasgele değişkendir.

Ör: Bir para tura gelinceye kadar atılabilir. İlk tura gelme için gerekli olan atışların sayısı olsun. Bu durumda X geometrik değişkendir.

Ör: Bir zar 6 gelinceye kadar atılabilir. Burada X , ilk 6'ya gelme için gerekli atışların sayısı. X geometrik rasgele değişken.

* X bir tek denemede başarısızlık olasılığı $1-p$ ve başarı olasılığı p olan geometrik rasgele değişken ise, X 'in olasılık fonksiyonu,

$$P(X=x) = f(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p \quad \text{dir.}$$

Ör 2: 1 elbise edineye kadar bir süre atalım.

a-) Bağımsız atışlar - diziinde, 3. atışta 1 gelme olasılığını bulunuz.

X : 1 elbise edineye kadar geçen atışların sayısı

$$P = \frac{1}{6} \quad P(X=3) = P(3) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} \cdot \frac{1}{6}$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216} //$$

X : geometrik rasgele değişken

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{1} = 6 //$$

$$Var(X) = \frac{1 - \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \cdot 36 = 30 //$$

